

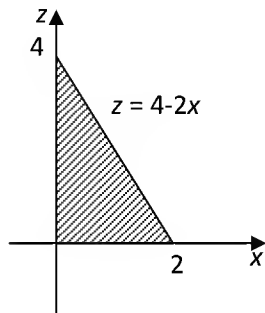
COLOQUIO 9-12-10

1- Área de la superficie: $x^2 + y^2 = 2x$, $z \leq 4 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$

Solución: El Área de una superficie es: $A = \iint_S ds = \iint_D \|\tilde{n}\| dx dz$

La superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2x$ no es proyectable en el plano xy , proyectamos sobre el plano xz . La región de integración resulta, intersecando:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 4 - (x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow z = 4 - 2x$$



Para sacar el normal se define la función

$$\bar{F}(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$$

La superficie de nivel 0 de \bar{F} es la superficie:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

El normal es:

$$\tilde{n} = \frac{\nabla \bar{F}}{F_y'} = \frac{(2(x-1), 2y, 0)}{2y} = \frac{(x-1, y, 0)}{y}$$

$$A = \iint_S ds = 2 \iint_D \|\tilde{n}\| dx dz = 2 \iint_D \sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{y^2}} dz dx = 2 \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2x + 1}{y^2}} dz dx$$

Evaluando el integrando sobre la superficie, la expresión: $x^2 + y^2 = 2x$ entonces:

$$\begin{aligned} A &= 2 \iint_D \sqrt{\frac{2x - 2x + 1}{2x - x^2}} dz dx = 2 \int_0^2 \int_0^{4-2x} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dz dx = 2 \int_0^2 \frac{(4-2x)}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 2 \int_0^2 \frac{(2+2-2x)}{\sqrt{2x - x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{2x - x^2}} dx + 2 \int_0^2 \frac{2-2x}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 4\pi \end{aligned}$$

La 1era integral por tabla y la 2da por sustitución.

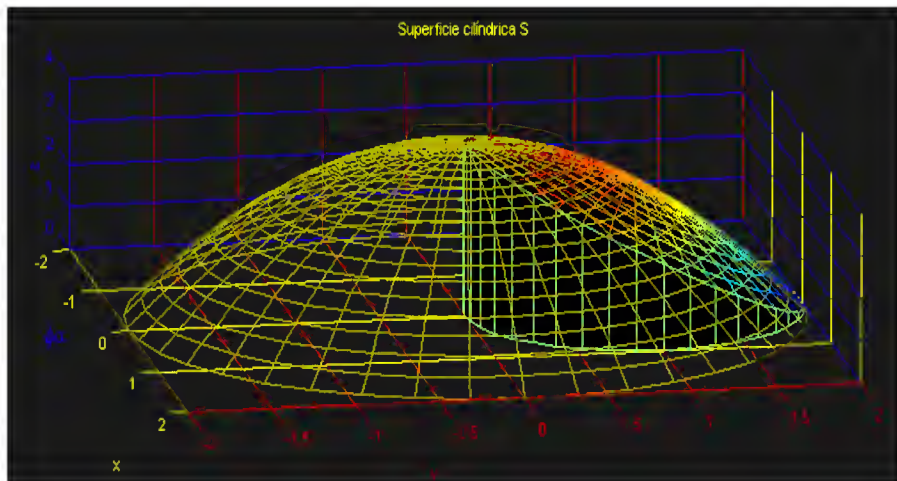
De otra forma (Parametrizando la superficie):

La Figura, abajo, muestra la superficie cilíndrica S de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ limitada superiormente por el paraboloide de ecuación $z \leq 4 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente por $z = 0$ (considerando al eje y como eje x para la visualización de la misma). La superficie S puede parametrizarse por:

$\bar{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{T}(u, v) = (\cos(u), 1 + \operatorname{sen}(u), v)$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 4 - 2(1 + \operatorname{sen}(u))$ un vector normal a la Superficie está dado por: $\bar{N} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{T}}{\partial v} = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0)$ vector cuya norma es 1.

El cálculo del área, es

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \iint_S \|(\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0)\| \, du \, dv = \iint_S \sqrt{\underbrace{\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u)}_1} \, du \, dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\operatorname{sen}(u)} dv \, du = \int_0^{2\pi} [2 - 2\operatorname{sen}(u)] \, du = 4\pi \end{aligned}$$



- 2- Calcular la Masa del cuerpo limitado por: $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2 - x^2$ si el gradiente de la densidad de masa es: $\nabla \delta(x, y, z) = (2xy, x^2, 0)$, $\delta(0, 0, 0) = 1$

Solución: Obtenemos la densidad δ integrando las componentes del gradiente de δ :

$$\begin{aligned} \delta'_x &= 2xy \quad \Rightarrow \quad \delta = x^2 y + C(y, z) \\ \delta'_y &= x^2 + C'(y, z) = x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y, z) = C \\ \Rightarrow \quad \delta(x, y, z) &= x^2 y + C \end{aligned}$$

Con la condición $\delta(0, 0, 0) = 1$ resulta: $C = 1$

Por lo tanto: $\delta(x, y, z) = x^2 y + 1$

La región de integración resulta de intersecar ambas superficies:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{\rho^2 + \rho^2 \cos^2 \theta}^{2 - \rho^2 \cos^2 \theta} [\rho^3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 1] \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [\rho^3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 1] \left[\underbrace{2 - \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \theta}_{2 - \rho^2 - \rho^2} \right] \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [2 - 2\rho^2] [\rho^3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 1] \rho \, d\rho \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (2\rho^4 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 2\rho - 2\rho^6 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - 2\rho^3) \, d\rho \, d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[2 \frac{\rho^5}{5} \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + \rho^2 - 2 \frac{\rho^7}{7} \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\rho^4}{2} \right]_0^1 d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{5} \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 1 - \frac{2}{7} \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{2} \right] d\theta = \\ &= \left[-\frac{4}{35} \frac{\cos^3(\theta)}{3} + \frac{1}{2} \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{4}{105} + \frac{\pi}{4}}} \end{aligned}$$

3. Si $\overline{F}(\vec{r}) = h(\|\vec{r}\|)$ \vec{r} es un campo radial con $\vec{r} = (x, y)$, siendo $h(\|\vec{r}\|) \neq 0$ para todo $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada continua. Halle la familia de líneas de campo y la familia ortogonal a ella.

Solución: Siendo $\vec{r} = (x, y)$, el campo es:

$$\overline{F}(\vec{r}) = h(\|\vec{r}\|) \vec{r} = h(\|\vec{r}\|)(x, y) = \left(x h(\sqrt{x^2 + y^2}), y h(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)$$

Para encontrar la familia de líneas de campo planteamos:

$$\frac{dx}{x h(\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{dy}{y h(\sqrt{x^2 + y^2})} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + \ln(C)$$

La familia de Líneas de campo son:

$$\boxed{y = Cx}$$

La familia de líneas ortogonales son:

$$\begin{aligned} y' = C &\Rightarrow y' = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -x \, dx = y \, dy \\ -\frac{x^2}{2} &= \frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \\ &\Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = K}} \end{aligned}$$

4. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (xh(y) + 4e^{-y}, h(y) - y, h(x) - yx)$, hallar $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada continua tal que el flujo del campo a través de cualquier sup. cerrada, orientable y regular sea nulo, sabiendo que: $\vec{F}(0,0,0) = (4,0,0)$. Con esa función h calcular el flujo a través de la superficie abierta S de ecuación: $x = 1 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $x \leq 4$ indicando el normal utilizado.

Solución:

Para que el flujo sea nulo debe ser nula la divergencia del campo:

Si $\vec{F}(x, y, z) = (xh(y) + 4e^{-y}, h(y) - y, h(x) - yx)$ entonces:

$$\nabla \cdot \vec{F} = h(y) + h'(y) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{h(y) + h'(y) - 1 = 0}$$

Se resuelve la Ecuación Diferencial por el método de variables separables:

$$\begin{aligned} h'(y) &= 1 - h(y) \Rightarrow \frac{dh(y)}{1 - h(y)} = dy \\ -\ln(1 - h(y)) &= y + C \Rightarrow \ln(1 - h(y)) = -y \underbrace{-C}_K \\ 1 - h(y) &= e^{-y+K} \Rightarrow h(y) = 1 - C_1 e^{-y} \end{aligned}$$

Si $\vec{F}(0,0,0) = (4,0,0)$.entonces $h(0) = 0$ con esta condición resulta:

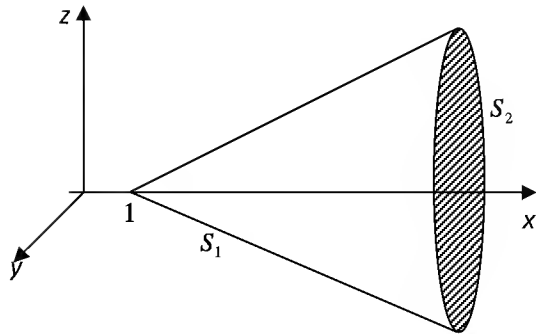
$$h(0) = 1 - C_1 e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$$

Reemplazando, la función h es: $h(y) = 1 - e^{-y}$

El campo vectorial es: $\vec{F}(x, y, z) = (x(1 - e^{-y}) + 4e^{-y}, (1 - e^{-y}) - y, (1 - e^{-y}) - yx)$

Como la superficie es abierta hay que cerrarla con el plano $x = 4$ para aplicar el

Teorema de Gauss



El normal al plano $x = 4$ es el vector $(1,0,0)$.

Por Gauss

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \vec{F}}_0 \, dx \\ \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= 0 \\ \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

Calculamos el flujo a través de la superficie S_2 para obtener el flujo a través de la Sup. Cónica S_1 :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = - \iint_D (4(1 - e^{-y}) + 4e^{-y}, 1 - e^{-y} - y, 1 - e^{-4} - y) \cdot (1, 0, 0) \, dy \, dz \\ \phi &= - \iint_D (4 - 4e^{-y} + 4e^{-y}) \, dy \, dz = -4 \iint_D dy \, dz = -4 \text{ Área}(D) = -4 \cdot 9\pi = \underline{\underline{-36\pi}} \end{aligned}$$

D es la proyección de S_2 sobre el plano yz , este círculo tiene ecuación $y^2 + z^2 \leq 9$

5- Si $\vec{F}(x, y) = (yx^2 + \text{sen}(x) - 3y, 6x + e^y - xy^2)$ halle $a > 0$ tal que la circulación del campo a lo largo de $x^2 + y^2 = a^2$ sea máxima.

Solución:

Usamos el teorema de Green : $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \iint_D (6 - y^2 - x^2 + 3) \, dx \, dy = \iint_D (9 - y^2 - x^2) \, dx \, dy \\ \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (9 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\theta = 9\pi a^2 - \pi \frac{a^4}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Llamando } g(a) = 9\pi a^2 - \pi \frac{a^4}{2} \Rightarrow g'(a) = 18\pi a - 2\pi a^3 = 0$$

$$2\pi a(9 - a^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a = 3 \vee a = -3$$

Como $a > 0$ la solución es $a = 3$

Veamos que para ese valor hay un máximo:

$$g''(a) = 18\pi - 6\pi a^2 \quad \Rightarrow \quad g''(3) = 18\pi - 48\pi = -30\pi < 0$$

Por lo tanto para $a = 3$ hay máximo.

Respuesta: La circulación de \vec{F} a lo largo de la curva es máxima cuando $a = 3$

